* ΑΣΚΗΣΗ (Α-W)

Ο κυλινδρος $x^2+y^2 \leq R^2$, $R>0$ αποκόπτει από την μπάλα $x^2+y^2+z^2 \leq 4R^2$ ένα σώμα k. Να υπολογισθεί το $V(k)$.

ΑΣΚΗΣΗ 1

ΝΔΟ η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2} \leq 1$ έχει εμβαδό ίσο με $\pi \cdot a \cdot \beta$.

ΛΥΣΗ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2} \leq 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{\beta}\right)^2 \leq 1$$

"γενικευμένες" πολικές συντεταγμένες

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \ \varphi \in [0,2\pi]$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot \cos\varphi \\ \beta \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}, \ \varphi \in [0,2\pi]$$

Δηλαδή για να υπολογιστεί το εμβαδόν θεωρούμε

$$g(r,\varphi) = \begin{pmatrix} a r \cos\varphi \\ \beta r \sin\varphi \end{pmatrix} \ \forall r \in [0,1], \ \varphi \in [0,2\pi]$$

$$\det Dg(r,\varphi) = a \cdot \beta \cdot r > 0$$

άρα, $\text{Εμβ. έλλειψης} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 1 \cdot (a\beta r)\, dr\, d\varphi = \pi a \cdot \beta$

ΑΣΚΗΣΗ 2

ΝΔΟ το ελλειψοειδές:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2} \leq 1 \quad \text{έχει όγκο } \frac{4}{3}\pi a \cdot \beta \cdot \gamma$$

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιούμε "γενικευμένες" σφαιρικές συντεταγμένες

$$\begin{pmatrix} x/a \\ y/\beta \\ z/\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ r \cdot \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{με } (r,\theta,\varphi) \in [0,\infty) \times [0,\pi] \times [0,2\pi]$$

$$\det Dg(r,\theta,\varphi) = \alpha\beta\gamma \cdot r^2 \sin\theta$$

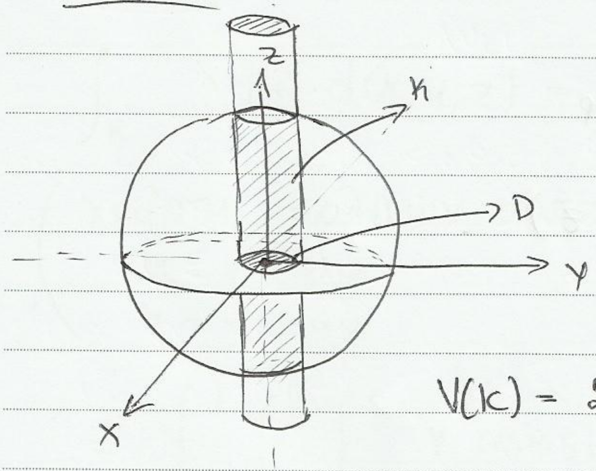
οπου $g(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \alpha \cdot r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ \beta \cdot r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ \gamma r \cos\theta \end{pmatrix}$

$\overset{ΚΑΜ}{\Longrightarrow}$ Ογκος ελλειψοειδους $= \int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} 1 \cdot (\alpha\beta\gamma r^2 \sin\theta)\, d\varphi\, d\theta\, dr$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Ο κυλινδρος $x^2+y^2 \leq R^2$, $R>0$ αποκοπτει απο την μπαλα $x^2+y^2+z^2 \leq 4R^2$ ενα σωμα K. Να υπολογιστει το περιεχομενο $V(K)$

ΛΥΣΗ



$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq R^2, \ -\sqrt{4R^2-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{4R^2-x^2-y^2}\}$$

$$V(K) = 2\int_D \sqrt{4R^2-x^2-y^2}\, d(x,y) =$$

οπου $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}$

πολ. συντεταγμενες $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$

$$2\int_0^R \int_0^{2\pi} \sqrt{4R^2-r^2} \cdot r\, d\varphi\, dr = 2 \cdot 2\pi \int_0^R \sqrt{4R^2-r^2} \cdot r\, dr =$$

$$= \frac{4\pi}{3} R^3 (8-3\sqrt{3})$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να υπολογιστει το ολοκληρωμα

$$I = \int_{B((0,0,0),R)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, d(x,y,z)$$

ΛΥΣΗ

Με χρήση σφαιρικών συντεταγμένων έχουμε:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin\theta \cos\varphi \\ r \sin\varphi \cos\varphi \\ r \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$I = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r \cdot r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr =$$

$$= 2\pi \left(\int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \right) \left(\int_0^R r^3 \, dr \right) = 2\pi \cdot 2 \frac{R^4}{4} = \pi R^4$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{B((0,0,0),R)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \, d(x,y,z)$$

ΛΥΣΗ

$$I = \lim_{\rho \to 0} \int_{B(\rho,R)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \, d(x,y,z) .$$

όπου

$$B(\rho,R) = \{(x,y,z) : \rho^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$$

$$I_1 = \int_\rho^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \cdot r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr = 2\pi (R^2 - \rho^2)$$

οπότε για $\lim_{\rho \to 0} I_1 = I = 2\pi R^2$.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Εστω B το χωρίο που βρίσκεται ανάμεσα από τα επίπεδα $x=0$, $y=0$, $z=1$ και το τμήμα του παραβολοειδούς $z=x^2+y^2$ πάνω από τον κυκλικό δίσκο $x^2+y^2\leq 1$ και μέσα στο πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου $z=0$. Υπολογίστε το

$$\int_B xyz\, d(x,y,z).$$

ΛΥΣΗ

$$B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \underbrace{x^2+y^2\leq 1,\ x,y\geq 0}_{D},\ x^2+y^2\leq z\leq 1\}$$

$$\int_B xyz\, d(x,y,z)=\int_D\int_{x^2+y^2}^{1} xy\cdot z\, dz\, d(x,y)=$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{Χρήση πολικών συντεταγμένων}\\ x=r\cdot\cos\varphi\\ y=r\cdot\sin\varphi\end{array}\right)$$

$$=\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{r^2}^{1} r^2\cos\varphi\sin\varphi\cdot z\cdot dz\, r\, d\varphi\, dr=\ldots=\frac{1}{32}$$

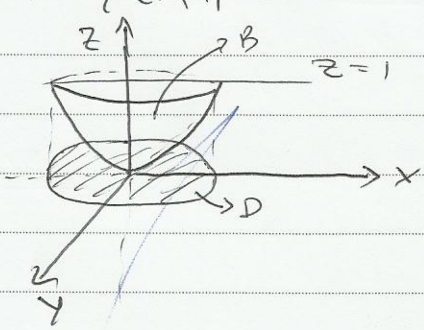
ΑΣΚΗΣΗ 8

Εστω B το χωρίο που περικλείεται από το επίπεδο $z=1$ και το παραβολοειδές $z=x^2+y^2$

Να υπολογιστεί το $\int_B \sqrt{x^2+y^2}\, d(x,y,z)$

ΛΥΣΗ

$$B=\{(x,y,z):\ x^2+y^2\leq z\leq 1\ \&\ x^2+y^2\leq 1\}$$



$$\int_B \sqrt{x^2+y^2}\, d(x,y,z)=$$

$$=\int_D\int_{x^2+y^2}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\, dz\, d(x,y)$$

και ξαναπαίρνουμε πολικές συντεταγμένες.
Έτσι, έχουμε ότι ισοδύναμα:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\int_{r^2}^1 r \, dz \right) r \, d\varphi \, dr = \dots = \frac{4\pi}{15}$$